

Løsningsforslag R2 V2011

Del 1

Oppgave 1

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = 2 \sin(2x)$

Kjerneregul for derivasjon gir:

$$f'(x) = g'(u) \cdot u'(x) = 2 \cos(2x) \cdot 2 = 4 \cos(2x)$$

2) $g(x) = x^2 \cdot \cos(2x)$

Produktregel for derivasjon gir:

$$g'(x) = uv' + u'v = x^2 \cdot (-\sin(2x) \cdot 2) + 2x \cos(2x) = 2x \cos(2x) - 2x^2 \sin(2x)$$

$$g'(x) = 2x \cdot (\cos 2x - 2x \cdot \sin 2x)$$

3) $h(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - 4x}$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} u', \quad \text{der } u = x^2 - 4x$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x}} 2x - 4 = \frac{2x - 4}{4\sqrt{x^2 - 4x}}$$

b) Bestem integrala

1) $\int x \cdot e^x dx$

Delvis integrasjon gir:

$$\int x \cdot e^x dx = \int u'v = uv - \int uv' dx, \quad \text{der } u' = e^x \quad u = e^x \quad v = x \quad v' = 1$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C$$

2) $\int \frac{5x+3}{x^2-9} dx$

Ser vi må bruke metode for delbrøksoppspaltning, som gir:

$$\int \frac{5x+3}{x^2-9} dx = \int \frac{A}{x-3} dx + \int \frac{B}{x+3} dx$$

$$\Rightarrow A(x+3) + B(x-3) = 5x+3$$

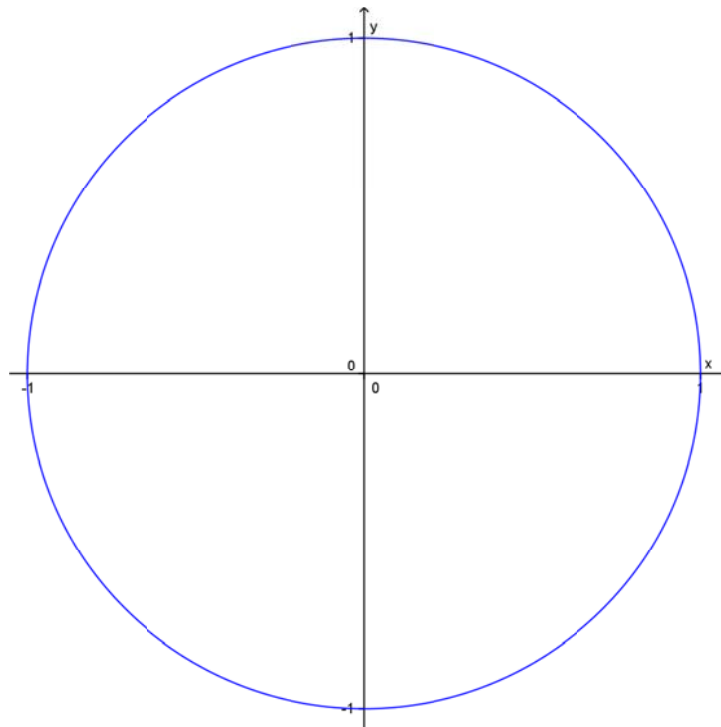
$$x \rightarrow 3 \Rightarrow A = 3$$

$$x \rightarrow -3 \Rightarrow B = 2$$

Når vi har funnet A og B , er det bare til å sette inn og gjennomføre integralet:

$$\int \frac{5x+3}{x^2-9} dx = 3 \int \frac{1}{x-3} dx + 2 \int \frac{1}{x+3} dx = 3 \ln|x-3| + 2 \ln|x+3| + C$$

- c) Figuren under viser en sirkel med sentrum i origo og radius lik 1.



Bruk et geometrisk resonnement til å bestemme $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$

Forklar hvordan du har tenkt.

Funksjonen $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ danner øvre halvsirkel, som spenner seg fra $x = -1$ til $x = 1$.

Siden det bestemte integralet vil gi arealet begrenset av grafen, x-aksen og $x = -1$ til $x = 1$, betyr dette egentlig arealet av halvsirkelen.

Vi vet at arealet av en sirkel er gitt ved: $A = \pi r^2$

Når $r = 1$ og vi kun skal ha det halve arealet, er da arealet gitt ved:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Vi kunne også tenkt at \sqrt{u} er mulig for alle $u \geq 0$. Vi ser da at $f(x)$ gjelder for alle $x^2 \leq 1$. Når $x = -1$ er $f(-1) = \sqrt{0} = 0$.

Det første punktet på grafen er da $(-1, 0)$.

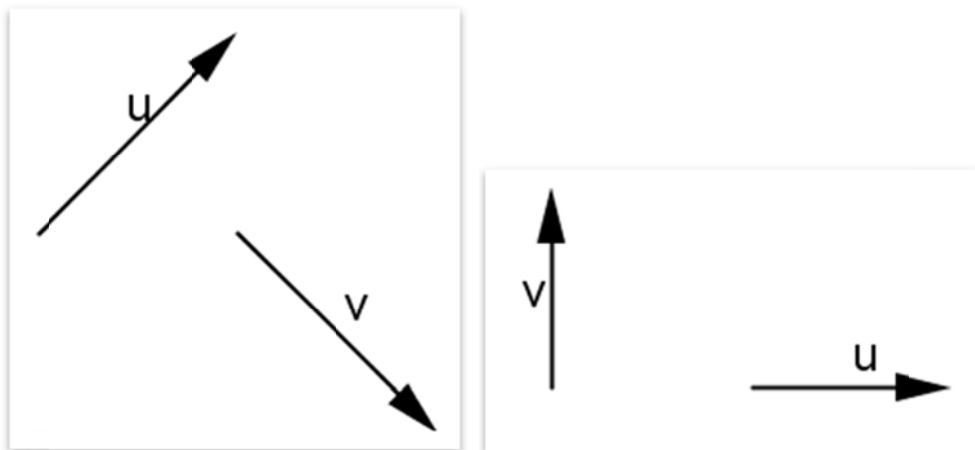
Deretter kan vi kan vi teste for $x = 0 \Rightarrow f(0) = \sqrt{1} = 1$. Det andre punktet blir da $(0, 1)$.

Tester vi for $x = 1 \Rightarrow f(1) = \sqrt{0} = 0$. Det siste punktet blir da $(1, 0)$. Av dette kan vi se at funksjonen f danner en halvsirkel med $(0, 0)$ som sentrum og radius lik 1.

- d) Vi har gitt to vektorer \vec{a} og \vec{b} . Forklar og tegn figurer som viser hvordan vektorene kan ligge i forhold til hverandre når:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

To vektorer står vinkelrett på hverandre hvis og bare hvis skalarproduktet mellom dem er lik null. Det vil si at det er 90° mellom de to vektorene.

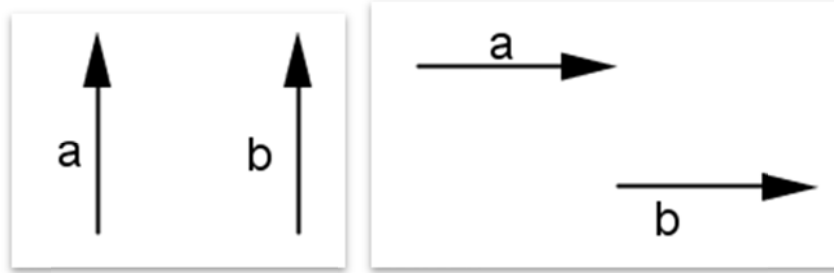


Begge vektorene, u og v, står her vinkelrett på hverandre.

2) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

To vektorer er parallelle hvis og bare hvis kryssproduktet mellom dem er nullvektor.

$\vec{a} \times \vec{b}$ vil, per definisjon, stå vinkelrett på både \vec{a} og \vec{b} .



- e) Vi har gitt punkta $A(1,1,-1)$, $(2,-1,3)$ og $C(3,2,2)$
 Vis ved regning at $\overline{AB} \times \overline{AC}$ står vinkelrett på både \overline{AB} og \overline{AC} .

Her skal vi altså vise at:

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AB} = 0 \text{ og } (\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AC} = 0$$

$$\overline{AB} = [2-1, -1-1, 3-(-1)] = [1, -2, 4]$$

$$\overline{AC} = [3-1, 2-1, 2-(-1)] = [2, 1, 3]$$

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = [-10, 5, 5] = 5[-2, 1, 1]$$

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AB} = [-2, 1, 1] \cdot [1, -2, 4] = (-2 \cdot 1) + (1 \cdot -2) + (1 \cdot 4) = -4 + 4 = 0$$

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AC} = [-2, 1, 1] \cdot [2, 1, 3] = (-2 \cdot 2) + (1 \cdot 1) + (1 \cdot 3) = -4 + 4 = 0$$

- f) Bevis formelen ved induksjon:

$$1 + 4 + 16 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

- (1) Vi ønsker først å vise at formelen stemmer for $n = 1$:

$$\frac{4^1 - 1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Vi ser at formelen gir rett svar.

- (2) Vi antar at formelen stemmer for $n = t$, så vi ønsker å vise at formelen også stemmer for $n = t + 1$

$$1 + 4 + 16 + \dots + 4^{t-1} + 4^t = \frac{4^t - 1}{3} + 4^t$$

Vi skriver om venstresiden:

$$\Rightarrow \frac{4^t - 1}{3} + 4^t = \frac{4^t - 1}{3} + 4^t$$

Vi slår sammen brøkene på begge sider:

$$\Rightarrow \frac{4^{t+1} - 1}{3} = \frac{4^{t+1} - 1}{3}$$

Via induksjonshypotesen viser dette at formelen stemmer også for $n = t + 1$.

Q.E.D

Oppgave 2

- a) Finn den generelle løsningen til differensiallikningen

$$y' - 2y = 5$$

der y er en funksjon av x

Vi ganger med integrerende faktor: e^{-2x}

$$e^{-2x} y' - 2e^{-2x} y = 5e^{-2x}$$

Vi bruker produktregelen for derivasjon baklengs:

$$(e^{-2x} y)' = 5e^{-2x}$$

Vi integrerer så høyresiden:

$$e^{-2x} y = 5 \int e^{-2x} dx = 5 \cdot \frac{1}{-2} e^{-2x} + C = \frac{5}{-2} e^{-2x} + C$$

Til slutt ganger vi med e^{2x} på begge sider, slik at vi står igjen med y :

$$e^{-2x} y \cdot e^{2x} = \left(\frac{5}{-2} e^{-2x} + C \right) e^{2x}$$

$$y = \frac{5}{-2} + C e^{2x}$$

- b)

- 1) Bestem konstanten i den generelle løsningen når du får vite at $y(0) = 2$
-

Vi setter inn $x = 0$ i likningen vår:

$$2 = \frac{5}{-2} + Ce^0 = \frac{5}{-2} + C$$

$$-C = \frac{5}{-2} - 2 = -\frac{9}{2}$$

$$C = \frac{9}{2}$$

- 2) Bestem x når $y = \frac{49}{2}$ (du kan få bruk for at $\ln 6 \cong 1,8$)

Vi har allerede regnet ut konstanten C , slik at vi nå kun står igjen med én ukjent:

$$\frac{49}{2} = \frac{5}{-2} + \frac{9}{2}e^{2x}$$

$$\frac{9}{2}e^{2x} = \frac{5+49}{2} = \frac{54}{2}$$

$$e^{2x} = \frac{54}{2} \cdot \frac{2}{9} = \frac{108}{18} = 6$$

$$2x \cdot \ln e = \ln 6$$

$$2x = \frac{\ln 6}{\ln e}$$

$$x = \frac{1,8}{2} = 0,9$$

- c) Grafen til y har en tangent i punktet $(0, 2)$
Finn likningen til denne tangenten.

Vi tenker oss at vi vil bruke «ettpunktformelen» for en rett linje:

$$y - y_0 = a(x - x_0)$$

a er gitt ved $y'(0)$. For å finne denne verdien, snur vi på uttrykket vårt i oppgave a) og setter $x = 0$:

$$y' = 5 + 2y \Rightarrow y'(0) = 5 + 2 \cdot y(0) = 5 + 2 \left(\frac{5}{-2} + \frac{9}{2}e^0 \right) = 5 - 5 + 9 = 9$$

Vi får dermed at likningen for tangenten er:

$$y - 2 = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y = 9x + 2$$

Del 2

Med hjelpemidler

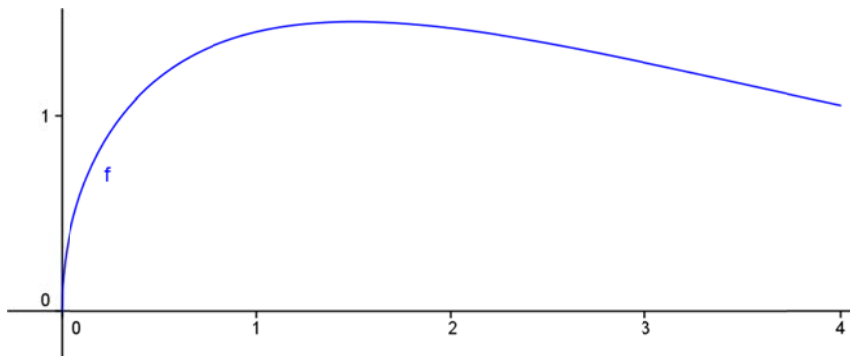
Oppgave 3

En fabrikk lager skaft til et kontorstempel. Skaftet ser ut som den omdreiningslegemet vi får når vi dreier grafen til f 360° om x-aksen, der

$$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot e^{-\frac{x}{3}}, \quad x \in [0, 4]$$

- a) Tegn grafen til f . Finn diameteren til skaftet der skaftet er bredest.
-

Vi bruker programmet *GeoGebra* til å plote grafen vår:



Diameteren er størst hvor grafen f har toppunkt. Grafen har toppunkt hvor

$$f'(x) = 0$$

Vi bruker *wxMaxima* til å derivere og løse likningen. Deretter bruker vi det samme programmet til å løse ligningen:

```
(%i21) wx_compute_wrt(diff(2*sqrt(x)*%e^(-x/3), x) = 0, x);
(%o21) [ x = 3/2 ]
```

Vi får at grafen f har toppunkt for $x = \frac{3}{2}$. Dette gir oss at radiusen er gitt ved $f\left(\frac{3}{2}\right)$.

$$d = 2r = 2 \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cong 2,98$$

b) Bestem volumet av skaftet.

Volumet av et omdreiningslegeme er gitt ved formelen:

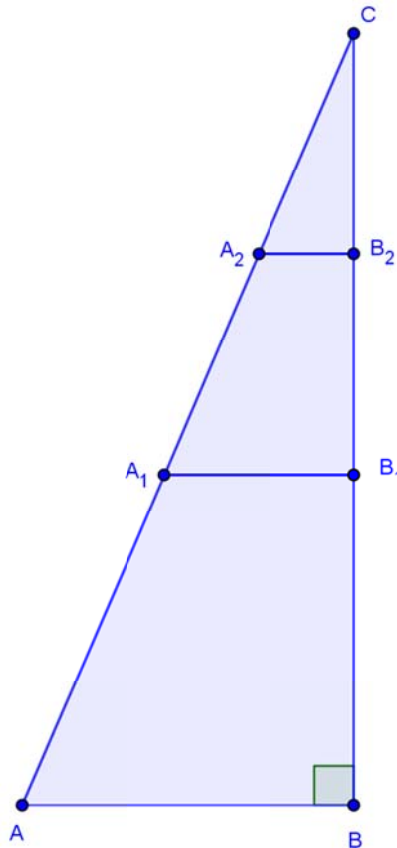
$$V = \pi \int (f(x))^2 dx$$

Denne ligningen bruker vi *GeoGebra* til å løse. Vi skriver inn kommandoen:

$$V = \pi \cdot \text{Integrer} [f(x)^2, 0,4] = 21,07$$

Oppgave 4

Vi skal se på en rettvinklet trekant ABC der $AB = 8$ og $BC = 16$. Punktet A_1 halverer AC , A_2 halverer A_1C og så videre. Punktet B_1 halverer BC , B_2 halverer B_1C og så videre. Se skissen nedenfor.



a)

1) Forklar at summen av arealene til trapesene ABB_1A_1 , $A_1B_1B_2A_2$ og så videre kan skrives

$$48 + 12 + 3 + \dots$$

Siden alle sidene blir halvert hver gang, vil arealet minke med $\frac{1}{4}$.

Dersom vi drar en strek fra A_1 og ned til AB , vil vi ende opp med et rektangel og en trekant. Vi ser at arealet av rektangelet er $\frac{1}{2} AB \cdot BB_1$. Trekantens areal vil være halvparten av rektangelet, slik at vi kan forme følgende formel for arealet:

$$\begin{aligned} A_1 &= \text{areal av rektangel} + \frac{1}{2} \text{areal av rektangel} = \frac{3}{2} \text{areal av rektangel} \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} AB \right) \cdot BB_1 = \frac{3}{2} (4 \cdot 8) = 48 \end{aligned}$$

Siden arealet av det andre trapeset vil være $\frac{1}{4}$ mindre, får vi:

$$A_n = A_1 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

- 2) Forklar av dette er en geometrisk rekke, og at rekken konvergerer.
-

Siden forholdet mellom hvert areal er $\frac{1}{4}$, og at hver sum er gitt ved formelen ovenfor, kan vi konkludere med at det er en geometrisk rekke.

En geometrisk rekke vil konvergere når $k^2 < 1$. Siden k er en fjerdedel, kan vi da si at rekka vil konvergere.

- b) Finn summen til den uendelige rekken, både ved å bruke formelen for sum av en rekke og ved å bruke et geometrisk resonnement.
-

$$S_n = \frac{A_1}{1-k} = \frac{48}{1-\left(\frac{1}{4}\right)} = 64$$

Vi vet at arealet av hele trekanten er lik $\frac{gh}{2} = \frac{8 \cdot 16}{2} = 64$. Siden trekanten kan deles inn i uendelige trapes, vil rekken konvergere og nærme seg 64 når $n \rightarrow \infty$.

Oppgave 5

En rett linje l er gitt ved parameterframstillingen

$$l: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

- a) Linjen l skjærer xy -planet i punktet A og xz -planet i B .

Regn ut avstanden mellom A og B .

I xy -planet er tredjekoordinaten null:

$$0 = 4 + 2t$$

$$t = -2$$

Punktet A er derfor definert som:

$$A = (5 - (2 \cdot -2), 3 - 2, 0) = (9, 1, 0)$$

I xz -planet er andrekoordinaten null:

$$0 = 3 + t$$

$$t = -3$$

Punktet B er derfor definert som:

$$B = (5 - (2 \cdot -3), 0, 4 + (2 \cdot -3)) = (11, 0, -2)$$

Avstanden mellom to punkt er gitt ved lengden av vektoren mellom dem:

$$\begin{aligned} |\overline{AB}| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{(11 - 9)^2 + (0 - 1)^2 + (-2 - 0)^2} \\ &= \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

En annen rett linje m er gitt ved parameterfremstillingen

$$m: \begin{cases} x = s \\ y = 1 - s \\ z = 1 + s \end{cases}$$

- b) Vis at linjene l og m ikke er parallelle
-

For at linjene skal være parallelle, må det finnes et tall k slik at retningsvektorene til linjene kan bli like:

$$l \parallel m \Rightarrow \vec{r}_l = k \cdot \vec{r}_m \Rightarrow [-2, 1, 2] = k \cdot [1, -1, 1]$$

Som vi ser, kan det ikke finnes et slikt tall. Linjene er derfor ikke parallelle.

To linjer i rommet som verken er parallelle eller skjærer hverandre, er *vindskeive*. For vindskeive linjer gjelder denne setningen:

Når to linjer l og m er vindskeive, fins det et punkt P på l og et punkt Q på m slik at \overline{PQ} står vinkelrett på både l og m . Avstanden mellom l og m er definert som $|\overline{PQ}|$.

- c) Vi lar P være et tilfeldig valgt punkt på l og Q er tilfeldig valgt punkt på m .

$$\text{Vis at vi kan skrive } \overline{PQ} = [s + 2t - 5, -s - t - 2, s - 2t - 3]$$

Et tilfeldig punkt på en linje, er uttrykt med hver parameter til linja.

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= [x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z] = [s - (5 - 2t), 1 - s - (3 + t), 1 + s - (4 + 2t)] \\ &= [s + 2t - 5, -s - t - 2, s - 2t - 3] \end{aligned}$$

- d) Finn koordinatene til P og Q når \overline{PQ} står vinkelrett på både l og m .

$$\overline{PQ} \perp l \Rightarrow \overline{PQ} \cdot \vec{r}_l = 0$$

$$\overline{PQ} \perp m \Rightarrow \overline{PQ} \cdot \vec{r}_m = 0$$

Vi løser likningssettet i *wxMaxima* med følgende kommandoer:

$$\overline{PQ} \cdot \vec{r}_l = 0:$$

```
(%i31) [-2, 1, 2] . [s+2*t-5, -s-t-2, s-2*t-3];
```

```
(%o31) -2(2t+s-5)-t+2(-2t+s-3)-s-2
```

```
(%i32) wx_compute_wrt(% = 0, s);
```

```
(%o32) [s = 2 - 9t]
```

$$\overline{PQ} \cdot \vec{r}_m = 0:$$

```
(%i37) [1, -1, 1] . [s+2*t-5, -s-t-2, s-2*t-3];
(%o37) t + 3 s - 6

(%i38) wx_compute_wrt(% = 0, t);
(%o38) [ t = 6 - 3 s ]
```

Vi løser deretter de to likningene med *wxMaxima*:

```
(%i95) solve([s=2-9*t, t=6-3*s], [s,t]);
(%o95) [ [ s = 2, t = 0 ] ]
```

Dette gir oss at:

$$P = (5 - 2 \cdot 0, 3 + 0, 4 + 2 \cdot 0) = (5, 3, 4),$$

$$Q = (2, 1 - 2, 1 + 2) = (2, -1, 3) \text{ og}$$

$$\overline{PQ} = [-3, -4, -1]$$

e) Finn avstanden mellom linjene l og m .

Avstanden mellom to vindskeive linjer er definert som: $|\overline{PQ}|$:

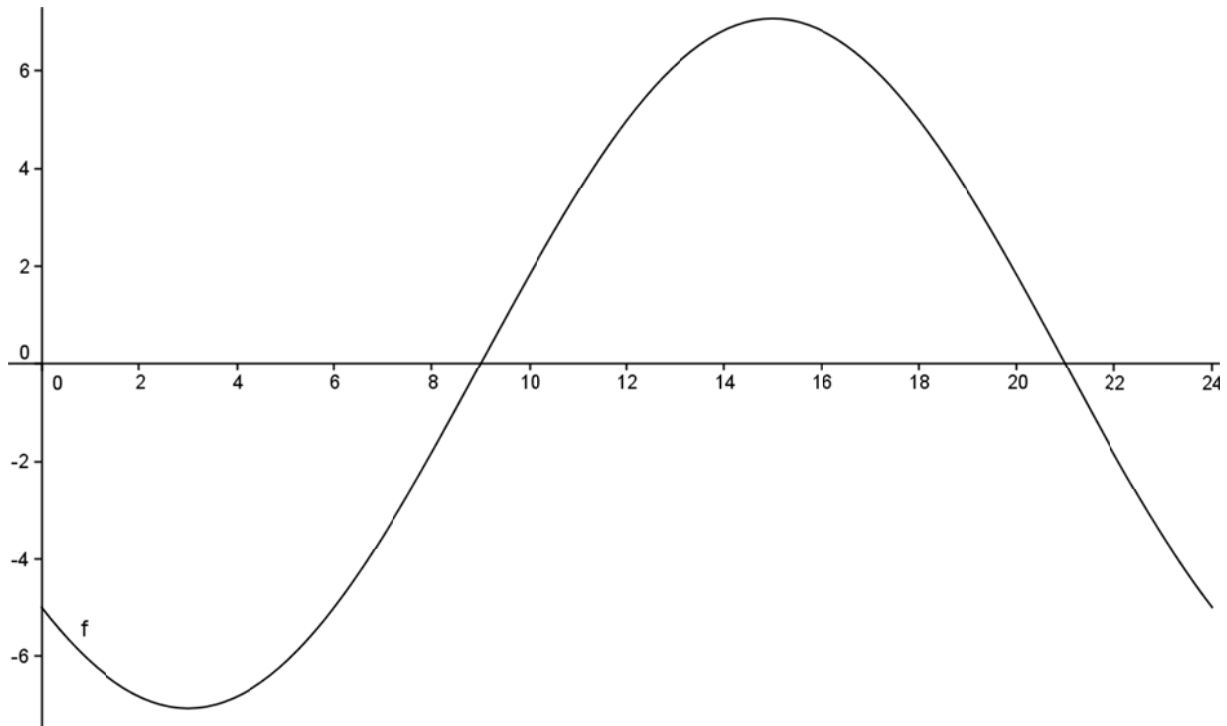
$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

Oppgave 6

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = -5 \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 5 \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right), \quad x \in [0, 24]$$

a) Tegn grafen til f . Les av amplituden og perioden til f .



Likevektslinjen til grafen er x-aksen, og vi ser da at amplituden er det samme som y-

koordinaten til toppunktet (ca. 7). $A = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} \approx 7$

Perioden er enkel å lese av, da grafen krysser x-aksen ved $x = 9$ og $x = 21$. Det vil si at halve perioden er $21 - 9 = 12$. Perioden er da $2 \cdot 12 = 24$

- b) Tegn fortegnslinje til f' og bruk denne til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .
-

$$f(x) = 5\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{4}\right)$$

$f(x)$ har høyest verdi ved: $5\sqrt{2} \cdot 1 = 5\sqrt{2}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{4}\right) = 1 \quad \sin^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + n2\pi$$

Vi får egentlig to løsninger, men de er like

$$x = \left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right) - \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{12}{\pi}$$

$$x = \left(-\frac{3\pi}{4} + n2\pi \right) \cdot \frac{12}{\pi}$$

$$x = 24n - 9$$

Når $x \in [0, 24]$ får vi, er den eneste løsningen for $n = 1$:

$$x = 24 \cdot 1 - 9 = 15$$

$$\text{Toppunkt: } (15, f(15)) = (15, 5 \cdot \sqrt{2})$$

$$\text{Bunnpunkt når } \sin(x) = -1: \quad \sin^{-1}(-1) = -\sin^{-1}1 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + n2\pi \vee \frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{2} + n2\pi$$

$$x = \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} + n2\pi \right) \cdot \frac{12}{\pi} \vee x = \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{5\pi}{4} + n2\pi \right) \cdot \frac{12}{\pi}$$

$$x = 24n - 21 \vee x = 3 + 24n$$

For $n = 1$ og $n = 0$ får vi:

$$x = 24 - 21 = 3 \vee x = 3$$

$$\text{Bunnpunkt: } (3, f(3)) = (3, -5\sqrt{2})$$

Lufttemperaturen g (målt i grader Celsius) gjennom et sommerdøgn er gitt ved:

$$g(x) = 22 - 5 \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 5 \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) = 22 + f(x)$$

Der x er antall timer etter midnatt.

- c) Bestem høyeste og laveste temperatur dette døgnet. På hvilke tidspunkter inntreffer disse verdiene.

Vi ser sammenhengen mellom g og f , og kan derfor trekke følgende konklusjon:

Funksjonen g vil ha de samme topp- og bunnpunktene, bare y -verdiene vil være 22 mer.

$$\text{Toppunkt: } (15, 22 + f(15)) = (15, 22 + 5\sqrt{2})$$

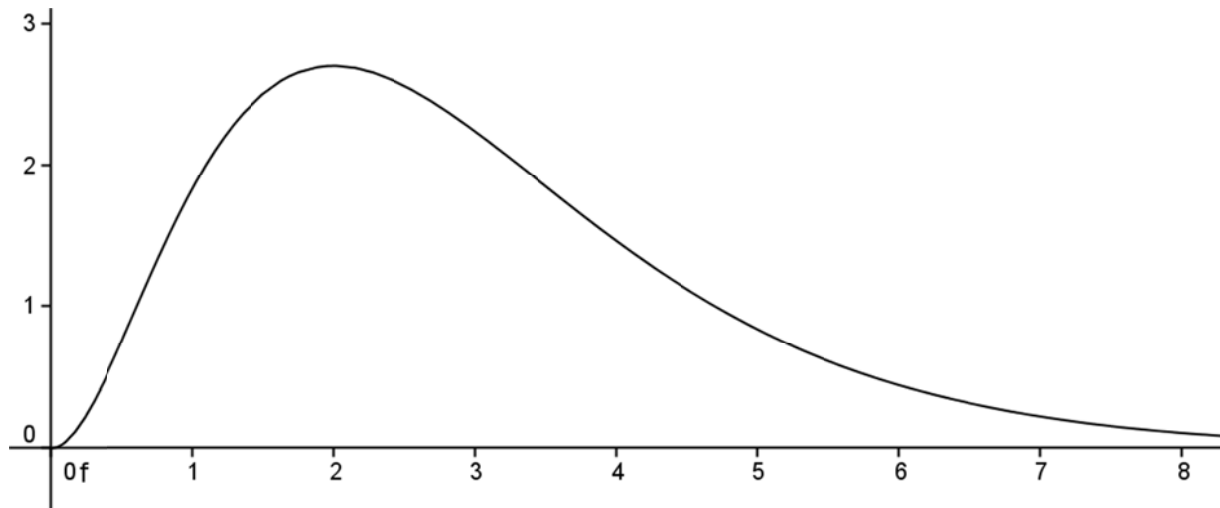
$$\text{Bunnpunkt: } (3, 22 + f(3)) = (3, 22 - 5\sqrt{2})$$

Oppgave 7

Vi har gitt funksjonen

$$f(x) = 5x^2 \cdot e^{-x}, \quad x > 0$$

a) Tegn grafen til f .



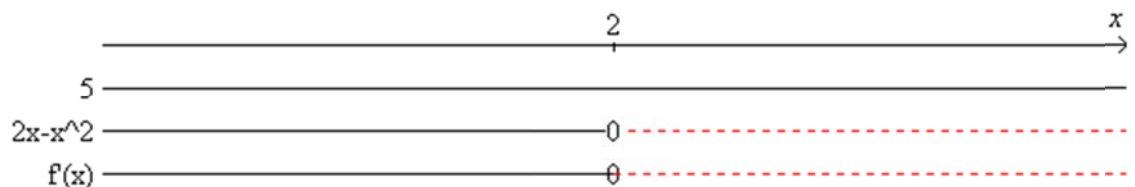
b)

1) Vis at $f'(x) = 5(2x - x^2) \cdot e^{-x}$. Hvilke derivasjonsregler har du brukt?

Her bruker vi produktregel for derivasjon:

$$f'(x) = 5x^2 \cdot (-e^{-x}) + 10x \cdot e^{-x} = 10x \cdot e^{-x} - 5x^2 \cdot e^{-x} = 5(2x - x^2) \cdot e^{-x}$$

2) Tegn fortegnslinje til f' . Bruk denne til å finne ut hvor f vokser, og hvor f avtar. Bestem eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f .



Grafen vokser i intervallet $x \in (0, 2]$ og avtar når $x \in (2, \infty)$.

Grafen har toppunkt i $(2, f(2))$. Den har ikke noen bunnpunkter (den har bunnpunkt i origo, men dette er under definisjonsmengden til grafen).

c) Vis ved derivasjon at:

$$\int f(x) dx = -5x^2 \cdot e^{-x} - 10x \cdot e^{-x} - 10e^{-x} + C$$

Vi deriverer høyreside for å se om vi får $f(x)$ som svar:

$$\left(-5x^2 \cdot (-e^{-x}) - 10x \cdot e^{-x}\right) - \left(10x \cdot (-e^{-x}) - 10 \cdot e^{-x}\right) + 10e^{-x}$$

$$\Rightarrow 5x^2 \cdot e^{-x} - 10x \cdot e^{-x} + 10x \cdot e^{-x} - 10e^{-x} + 10e^{-x}$$

$$\Rightarrow 5x^2 \cdot e^{-x}$$

d) Du får vite at $\lim_{a \rightarrow \infty} (a^n \cdot e^{-a}) = 0$ for $n \in \mathbb{R}$

Bruk dette til å bestemme

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a f(x) dx$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (F(a) - F(0))$$

$$\Rightarrow \left(-5a^2 \cdot e^{-a} - 10a \cdot e^{-a} - 10e^{-a}\right) - \left(-5 \cdot 0 \cdot e^{-0} - 10 \cdot 0 \cdot e^{-0} - 10e^{-0}\right)$$

Vi bruker informasjonen vi har fått, om at grensen av uttrykket $a^n \cdot e^{-a}$ vil gå mot null når a går mot uendelig:

$$\Rightarrow (0 - 0 - 0) - (0 - 0 - 10) = 10$$